Algunas identidades binomiales del tipo de momentos.

Claudio de Jesús Pita Ruiz Velasco
Universidad Panamericana
México D.F., México
email: cpita@mx.up.mx

Abstract

Partiendo de una identidad básica que puede probarse con argumentos elementales de probabilidad, se presentan algunas identidades que surgen al relacionar distintos tipos de momentos de las variables aleatorias en cuestión.

1 Introducción

POR HACER.

2 Preliminares

Comenzaremos por recordar algunas de las definiciones y resultados básicos de la probabilidad con los que estaremos trabajando en este artículo. Si Ω es el espacio muestral de un experimento aleatorio, y $\mathcal{A}$ es el conjunto de eventos (el σ-campo) de Ω, una (medida de) *probabilidad* es una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, tal que: (i) $P(\Omega) = 1$, (ii) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$, y, (iii) Si los eventos $A_1, \ldots, A_n$ son dos a dos disjuntos, entonces $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Algunas consecuencias inmediatas de esta definición (que usaremos sin comentarios adicionales) son: (1) $P(A) \in [0,1]$ para todo $A \in \mathcal{A}$, (2) $P(\varnothing) = 0$, (3) $P(A^c) = 1 - P(A)$. Dados dos eventos $A, B \in \Omega$, se define la *probabilidad condicional de A dado B*, lo cual se escribe $P(A \mid B)$, como $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, cuando $P(B) > 0$. Se tiene entonces la *ley de multiplicación* $P(A \cap B) = P(A \mid B) P(B)$. Se dice que los eventos A y B son *independientes*, cuando $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. En el caso de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la independencia requiere que se dé la igualdad $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$ para todos los índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, en donde $k = 2, \ldots, n$. Si $B_1, B_2, ..., B_n$ son eventos dos a dos disjuntos, tales que $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, y A es un evento cualquiera, entonces se tiene la *ley de probabilidad total*: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$.

Una *variable aleatoria* X es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para cualquier intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ es un evento. Si el rango R_X de X (llamado "conjunto de valores posibles de X") es un conjunto discreto, se dice que X es una *variable aleatoria discreta*. En este artículo aparecerán variables aleatorias discretas para las que $R_X \subseteq \mathbb{N}' = \{0, 1, \ldots\}$. El evento $X^{-1}(a)$, $a \in R_X$, se escribe como $\{X = a\}$, y la probabilidad de éste se escribe como $P(X = a)$. Se puede dar sentido a $P(X = x)$ para $x \in \mathbb{R}$ poniendo $P(X = x) = 0$ si $x \notin R_X$. La función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ así obtenida se llama *función de probabilidad de* X. Observe que esta función tiene la propiedad $\sum_{k \in R_X} P(X = k) = 1$. Dada una variable aleatoria discreta X con valores posibles R_X, el *valor esperado (o media) de* X, denotado por $E(X)$, se define como $E(X) = \sum_{k \in R_X} kP(X = k)$, cuando esta serie converge. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada, la composición $Y = \varphi(X)$ es una nueva variable aleatoria, cuyo valor esperado (si existe) se puede calcular como $E(Y) = \sum_{k \in R_X} \varphi(k) P(X = k)$.

La variable aleatoria discreta más simple es la relacionada a un *experimento (prueba) de Bernoulli con parámetro* $p \in [0, 1]$. En este caso el espacio muestral está formado por sólo dos resultados, uno llamado *éxito* (e), que ocurre con probabilidad p, y el otro llamado *fracaso* (f), que ocurre entonces con probabilidad $1-p$. (Por ejemplo, al lanzar una moneda se declara éxito a uno de los lados de la moneda y fracaso al otro. Si la moneda no está cargada, se tiene además que $p = \frac{1}{2}$.) La variable aleatoria X tal que $X(e) = 1$ y $X(f) = 0$, es una *variable aleatoria de Bernoulli con parámetro* p. Su función de probabilidad es $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$ y $P(X = x) = 0$ para $x \notin \{0, 1\}$. Si tenemos n variables aleatorias de Bernoulli $X_1, \ldots, X_n$ con parámetro p (el mismo para todas), independientes (lo que significa que los eventos $\{X_1 = j_1\}, \ldots, \{X_n = j_n\}$ son independientes, para cualesquier $j_1, j_2, \ldots, j_n \in \{0, 1\}$), podemos considerar la variable aleatoria $X = X_1 + \cdots + X_n$. Ésta cuenta el número de éxitos que hay en n pruebas de Bernoulli. (En el ejemplo de la moneda, se trata de lanzarla n veces –o equivalentemente, lanzar una vez cada moneda de un grupo de n monedas idénticas–, y contar el número de caras –o cruces– que se obtienen.) A esta nueva variable aleatoria discreta se le llama *binomial con parámetros* (n, p), y escribimos $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Es claro que el conjunto de valores posibles para X es $\mathcal{N} = \{0, 1, \ldots, n\}$ y que su función de probabilidad es $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \mathcal{N}$ (y, por supuesto, $P(X = x) = 0$ si $x \notin \mathcal{N}$). (Observe que la condición $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$ es simplemente la fórmula de $(a + b)^n$, con $a = p$ y $b = 1 - p$.)

Sea $\kappa \in \mathbb{N}$ dado. Consideremos la variable aleatoria Y que cuenta el número de pruebas de Bernoulli independientes (con probabilidad de éxito p, la misma para todas), necesarias para obtener κ éxitos (de modo que el evento $\{Y = n\}$ significa que el κ-ésimo éxito se obtuvo precisamente en la n-ésima prueba). Como hasta la $(n-1)$-ésima prueba se llevan $\kappa-1$ éxitos (y por tanto $n-\kappa$ fracasos), y en la n-ésima prueba ocurre un éxito (el κ-ésimo), se ve que $P(Y=n) = \binom{n-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{n-\kappa}$, en donde $n = \kappa, \kappa+1, \ldots$. Haciendo $x = n-\kappa \geq 0$, el miembro derecho de la fórmula anterior se ve como $\binom{x+\kappa-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x}$. La variable aleatoria X cuya función de probabilidad es $P(X=x) = \binom{x+\kappa-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x}$, $x = 0, 1, \ldots$ se llama *binomial negativa con parámetros* (κ, p), y escribiremos $X \sim \mathrm{BinNeg}(\kappa, p)$. Así pues, el evento $\{X = x\}$ es aquél en el que en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito p, el κ-ésimo éxito ocurre en la $(x+\kappa)$-ésima prueba. El hecho de que la fórmula descrita anteriormente para $P(X=x)$ es efectivamente una función de probabilidad de la variable aleatoria X con conjunto de valores posibles $\mathbb{N}'$ (es decir que $\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = 1$), se explica de la siguiente manera: el coeficiente binomial $\binom{\kappa}{x} = \frac{\kappa!}{x!(\kappa-x)!}$, que en principio está definido solamente para $\kappa, x \in \mathbb{N}'$ tales que $\kappa - x \geq 0$, puede escribirse (después de simplificar los factores comunes de $\kappa!$ y de $(\kappa-x)!$) como $\binom{\kappa}{x} = \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)\cdots(\kappa-x+1)}{x!}$. Esta expresión hace sentido para cualquier $\kappa \in \mathbb{Z}$ y cualquier $x \in \mathbb{N}'$. De hecho, observe que para cualquier $\kappa \in \mathbb{N}$ dado, el coeficiente "binomial negativo" $\binom{-\kappa}{x}$ se escribe como $\binom{-\kappa}{x} = (-1)^{x} \binom{x+\kappa-1}{\kappa-1}$, y que esta expresión tiene sentido para cualquier $x = 0, 1, \ldots$. Así pues, si para $\kappa \in \mathbb{N}$ dado, hacemos el desarrollo formal de $(1-q)^{-\kappa}$ según la fórmula del binomio, obtenemos $(1-q)^{-\kappa} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-\kappa}{x} (-q)^{x} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+\kappa-1}{\kappa-1} q^{x}$. Si $q = 1-p$ tenemos finalmente que $\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+\kappa-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x} = p^{\kappa} p^{-\kappa} = 1$, como queríamos.

Para $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$, se define el *n-ésimo factorial descendente de* x, denotado por $(x)_n$, como $(x)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (x-i)$. Si $n > x$ se define $(x)_n = 0$. Observe que si $x, n \in \mathbb{N}$, se tiene $\binom{x}{n} = \frac{1}{n!} (x)_n$. Para $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ se define el *n-ésimo factorial ascendente de* x, denotado por $x^{(n)}$, como $x^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$. Si $x, n \in \mathbb{N}$, se tiene $\binom{x+n-1}{n} = \frac{1}{n!} x^{(n)}$. Finalmente observe que $x^{(n)} = (-1)^{n} (-x)_n$ (o bien $(x)_n = (-1)^{n} (-x)^{(n)}$).

Como $(x)_n$ es un polinomio en x de grado n (con término independiente nulo), podemos escribir $(x)_n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) x^{k}$, en donde $s(n,k)$ son los coeficientes del polinomio, los cuales quedan completamente determinados por n y k, $1 \leq k \leq n$. Los números $s(n,k)$ se llaman *números de Stirling del primer tipo*. De hecho, se tiene $s(n,n) = 1$ y, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ se tiene $s(n,k) = (-1)^{n-k} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \leq n-1} i_1 i_2 \cdots i_{n-k} \right)$. Para $k < 1$ o $k > n$ se define $s(n,k) = 0$. Así como expresamos a $(x)_n$ como combinación lineal de las potencias $x, x^2, \ldots, x^n$ de x, podemos considerar la expresión de cada una de las potencias x^n en términos de $(x)_1, (x)_2, \ldots, (x)_n$, digamos $x^n = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{S}(n,k) (x)_k$. Los correspondientes coeficientes $\mathcal{S}(n,k)$ de esta expansión se llaman *números de Stirling del segundo tipo*. De hecho, se tiene la siguiente fórmula explícita (ver [C], p. 82) $\mathcal{S}(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{n}$. Observe que $\mathcal{S}(n,1) = \mathcal{S}(n,n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y se define $\mathcal{S}(n,k) = 0$

para $k < 1$ o $k > n$. Finalmente, usando que $x^{(n)} = (-1)^n (-x)_n$, obtenemos

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k, \tag{2.1}$$

y

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \mathcal{S}(n,k) x^{(k)}. \tag{2.2}$$

Las definiciones anteriores conducen de manera natural a la propiedad de inversión entre los números de Stirling de primero y segundo tipos: si $s = (s(n,k))_{\substack{n=1,2,\ldots \\ k=1,2,\ldots}}$ y $\mathcal{S} = (\mathcal{S}(n,k))_{\substack{n=1,2,\ldots \\ k=1,2,\ldots}}$ son dos matrices infinitas, en cuya n-ésima línea y k-ésima columna se encuentran los números de Stirling $s(n,k)$ y $\mathcal{S}(n,k)$, respectivamente, entonces $s\mathcal{S} = \mathcal{S}s = I$, en donde I es la matriz identidad (de orden infinito). Es decir, para cualesquier $k, n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{j=k}^{n} s(n,j) \mathcal{S}(j,k) = \sum_{j=k}^{n} \mathcal{S}(n,j) s(j,k) = \delta_{kn}. \tag{2.3}$$

Algunas líneas y columnas de las matrices s y $\mathcal{S}$ son

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & \cdots \\ -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sea X una variable aleatoria discreta con conjunto de valores posibles $R_X \subseteq \mathbb{N}'$, y sea $k \in \mathbb{N}$ dado.

(*) Se defiene el *k-ésimo momento potencial de X*, denotado por $m_{(k,X)}$, como $m_{(k,X)} = E\left(X^k\right)$ (cuando éste existe). Es decir, se tiene que $m_{(k,X)} = \sum_{i \in R_X} i^k P(X = i)$. Si para algún $\delta > 0$ existe la función $M_{(m,X)}(t) = E\left(e^{tX}\right)$, $t \in (-\delta, \delta)$, ésta se llama *función generadora de momentos potenciales de X*, y tiene la propiedad de que $\left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0} M_{(m,X)}(t) = m_{(k,X)}$.

(*) Se defiene el *k-ésimo momento factorial descendente de X*, denotado por $f_{(k,X)}$, como $f_{(k,X)} = E\left((X)_k\right)$ (cuando éste existe). Es decir, se tiene que $f_{(k,X)} = \sum_{i \in R_X} (i)_k \, P(X = i)$. Como $(i)_k = k!\binom{i}{k}$, se tiene que $f_{(k,X)} = k! b_{(k,X)}$, en donde $b_{(k,X)} = \sum_{i \in R_X} \binom{i}{k} P(X = i)$ es el *k-ésimo momento binomial de X*.

(*) Se defiene el *k-ésimo momento factorial ascendente de X*, denotado por $f^+_{(k,X)}$, como $f^+_{(k,X)} = E\left(X^{(k)}\right)$ (cuando éste existe). Es decir, se tiene que $f^+_{(k,X)} = \sum_{i \in R_X} i^{(k)} P(X = i)$. Como $i^{(k)} = k!\binom{i+k-1}{k}$, se tiene que $f^+_{(k,X)} = k! b^-_{(k,X)}$, en donde $b^-_{(k,X)} = \sum_{i \in R_X} \binom{i+k-1}{k} P(X = i)$ es el *k-ésimo momento binomial negativo de X*.

Las fórmulas $x^n = \sum_{k=1}^n \mathcal{S}(n,k)\,(x)_k$ y $(x)_k = \sum_{k=1}^n s(n,k)\,x^k$, anteriormente establecidas, nos dan relaciones entre los momentos factoriales descendentes y los momentos potenciales de la variable aleatoria discreta X, a saber

$$m_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(k,j)\, f_{(j,X)}, \tag{2.4}$$

y

$$f_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k} s(r,j)\, m_{(j,X)}, \tag{2.5}$$

respectivamente. Similarmente, las fórmulas $x^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \mathcal{S}(n,k)\, x^{(k)}$, y, $x^{(n)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s(n,k)\, x^k$, nos dan relaciones entre los momentos factoriales ascendentes y los momentos potenciales de X, a saber

$$m_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \mathcal{S}(k,j)\, f^+_{(j,X)}, \tag{2.6}$$

y

$$f^+_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} s(k,j)\, m_{(j,X)}, \tag{2.7}$$

respectivamente.

Algunas combinaciones de las fórmulas anteriores nos dan relaciones entre los momentos factoriales ascendentes y los momentos factoriales descendentes de X, a saber

$$f_{(k,X)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} s(k,i)\, \mathcal{S}(i,j)\, f^+_{(j,X)}, \tag{2.8}$$

y

$$f^+_{(k,X)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{k-i} s(r,i)\, \mathcal{S}(i,j)\, f_{(j,X)}. \tag{2.9}$$

En [H-L] se establecen las siguientes relaciones entre los momentos binomiales de una variable aleatoria discreta X y sus momentos binomiales negativos:

$$b_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n-1}{j-1} b^{-}_{(j,X)}, \tag{2.10}$$

y

$$b^{-}_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} b_{(j,X)}. \tag{2.11}$$

Consideremos la variable aleatoria $X \sim \mathrm{Bin}\,(n,p)$. Es fácil ver que la función generadora de momentos potenciales de X es $M_{(m,X)}\,(t) = \left(1-p+pe^{t}\right)^{n}$, de modo que, según (2.4), para $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$m_{(k,X)} = \left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0} \left(1-p+pe^{t}\right)^{n} = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}\,(k,j)\, f_{(j,X)}. \tag{2.12}$$

Los momentos factoriales descendentes $f_{(k,X)}$ son[1]

$$f_{(k,X)} = (n)_k\, p^k.$$

Así pues, podemos escribir (2.12) como

$$\sum_{j=1}^{n} j^k \binom{n}{j} p^j\,(1-p)^{n-j} = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}\,(k,j)\,(n)_j\, p^j. \tag{2.13}$$

Usando (2.9) vemos que los momentos factoriales ascendentes de X son

$$f^{+}_{(k,X)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} (-1)^{k-i}\, s\,(k,i)\,\mathcal{S}\,(i,j)\,(n)_j\, p^j. \tag{2.14a}$$

Es decir que

$$\sum_{j=1}^{n} j^{(k)} \binom{n}{j} p^j\,(1-p)^{n-j} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} (-1)^{k-i}\, s\,(k,i)\,\mathcal{S}\,(i,j)\,(n)_j\, p^j. \tag{2.14b}$$

Como $b_{(k,X)} = \frac{1}{k!} f_{(k,X)}$ tenemos que los momentos binomiales de X son

---

[1] Los cáclulos son:

$$\begin{aligned} f_{(k,X)} &= \sum_{i=k}^{n} (i)_k \binom{n}{i} p^i\,(1-p)^{n-i} = k! \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} p^i\,(1-p)^{n-i} \\ &= k!\binom{n}{k} p^k \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} p^{i-k}\,(1-p)^{n-i} = (n)_k\, p^k. \end{aligned}$$

$$b_{(k,X)} = \frac{1}{k!}\,(n)_k\,p^k = \binom{n}{k}p^k. \tag{2.15a}$$

O sea que

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}p^j\,(1-p)^{n-j} = \binom{n}{k}p^r. \tag{2.15b}$$

Según (2.11) tenemos también que los momentos binomiales negativos de X son

$$b^{-}_{(k,X)} = \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}b_{(j,X)} = \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^j. \tag{2.16a}$$

Es decir que

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{j+k-1}{k}\binom{n}{j}p^j\,(1-p)^{n-j} = \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^j. \tag{2.16b}$$

Observe que podemos escribir la expresión anterior como

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n}j^{(k)}\binom{n}{j}p^j\,(1-p)^{n-j} = \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^j,$$

de modo que, según (2.14b) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{k-i}\,s\,(k,i)\,\mathcal{S}\,(i,j)\,(n)_j\,p^j = k!\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^j.$$

La función generadora de momentos potenciales de $Y \sim \mathrm{BinNeg}\,(\kappa,p)$ es $M_{(m,Y)}\,(t) = \frac{p^\kappa}{(1-(1-p)e^t)^\kappa}$, de modo que, según (2.4), para $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$m_{(k,Y)} = \left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0}\frac{p^\kappa}{\left(1-(1-p)\,e^t\right)^\kappa} = \sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}\,(k,j)\,f_{(j,Y)}. \tag{2.17}$$

Los momentos factoriales descendentes de Y son[2]

$$f_{(k,Y)} = \frac{(k+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}.$$

Entonces, (2.17) puede escribirse como

$$\sum_{y=1}^{\infty} y^{k}\binom{y+\kappa-1}{\kappa-1}p^{\kappa}(1-p)^{y} = \sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(k,j)\,\frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{j}. \tag{2.18}$$

De (2.9) vemos que los momentos factoriales ascendentes de Y son

$$f^{+}_{(k,Y)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{k-i}\,s(r,i)\,\mathcal{S}(i,j)\,\frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{j}. \tag{2.19a}$$

Es decir, se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{y=1}^{\infty} y^{(k)}\binom{y+\kappa-1}{\kappa-1}p^{\kappa}(1-p)^{y} \qquad (2.19b) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{k-i}\,s(k,i)\,\mathcal{S}(i,j)\,\frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{j}. \end{aligned}$$

Como $b_{(k,X)} = \frac{1}{k!}f_{(k,X)}$ tenemos que los momentos binomiales de Y son

$$\begin{aligned} b_{(k,Y)} &= \frac{1}{k!}\,\frac{(k+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k} \qquad (2.20a) \\ &= \binom{k+\kappa-1}{k}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}. \end{aligned}$$

[2] Los cálculos son:

$$\begin{aligned} f_{(k,Y)} &= \sum_{y=k}^{\infty}(y)_{k}\binom{y+\kappa-1}{\kappa-1}p^{\kappa}(1-p)^{y} \\ &= \sum_{y=k}^{\infty}\frac{(y+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!\,(y-k)!}p^{\kappa}(1-p)^{y} \\ &= \frac{(k+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\sum_{y=k}^{\infty}\frac{(y+\kappa-1)!}{(k+\kappa-1)!\,(y-k)!}p^{\kappa}(1-p)^{y} \\ &= \frac{(k+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}(1+p)^{k}\,p^{-k}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k+\kappa-1}{k+\kappa-1}p^{k+\kappa}(1-p)^{x} \\ &= \frac{(k+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}. \end{aligned}$$

O sea que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{y=k}^{\infty} \binom{y}{k} \binom{y+\kappa-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{y} \qquad (2.20b) \\
= & \binom{k+\kappa-1}{k} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}.
\end{aligned}
$$

Según (2.11) tenemos también que los momentos binomiales negativos de Y son

$$
\begin{aligned}
b^{-}_{(k,Y)} &= \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} b_{(j,Y)} \qquad (2.21a) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \binom{j+\kappa-1}{j} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j}.
\end{aligned}
$$

O sea que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{y=1}^{\infty} \binom{y+k-1}{k} \binom{y+\kappa-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{y} \qquad (2.21b) \\
= & \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \binom{j+\kappa-1}{j} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j}.
\end{aligned}
$$

3 El problema inicial

La identidad básica en este artículo está contenida en el siguiente teorema. Daremos dos demostraciones de él.

Teorema 3.1 *Sean $n, k, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Entonces para cualquier $p \in \mathbb{R}$ se tiene la identidad*

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j_{m-1}=k}^{n} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{k} p^{k+\sum_{i=1}^{m-1} j_i} (1-p)^{n-k} \qquad (3.1) \\
= & \binom{n}{k} p^{mk} (1-p^m)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Convenimos que si $m = 1$, las sumatorias del lado izquierdo de (3.1) se reducen al único término $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (que es el lado derecho de (3.1) con $m = 1$).

Demostración 1. Por inducción sobre m. Usaremos que $\binom{N}{M}\binom{M}{P} = \binom{N}{P}\binom{N-P}{M-P}$. Para $m = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} p^{k+j} (1-p)^{n-k} &= p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} p^j \\
&= \binom{n}{k} p^{2k} (1-p)^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} p^i \\
&= \binom{n}{k} p^{2k} (1-p)^{n-k} (1+p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^{2k} \left(1-p^2\right)^{n-k},
\end{aligned}$$

lo que muestra la identidad en este caso. Supongamos válido el resultado para una $m \geq 2$ arbitraria y veamos su validez para $m+1$. Se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j_m=k}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_m}{k} p^{k+\sum_{i=1}^m j_i} (1-p)^{n-k} \\
= \; & p^k \sum_{j_m=k}^{n} \binom{j_m}{k} (1-p)^{j_m-k} \\
& \cdot \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^m j_i} (1-p)^{n-j_m} \\
= \; & p^k \sum_{j_m=k}^{n} \binom{j_m}{k} (1-p)^{j_m-k} \binom{n}{j_m} p^{m j_m} (1-p^m)^{n-j_m} \\
= \; & \binom{n}{k} p^k \sum_{j_m=k}^{n} \binom{n-k}{j_m-k} p^{m j_m} (1-p^m)^{n-j_m} (1-p)^{j_m-k} \\
= \; & \binom{n}{k} p^{(m+1)k} \sum_{j_m=k}^{n} \binom{n-k}{j_m-k} p^{m(j_m-k)} (1-p^m)^{n-j_m} (1-p)^{j_m-k} \\
= \; & \binom{n}{k} p^{(m+1)k} \sum_{j_m=k}^{n} \binom{n-k}{j_m-k} \left(p^m - p^{m+1}\right)^{j_m-k} (1-p^m)^{n-j_m} \\
= \; & \binom{n}{k} p^{(m+1)k} \left(p^m - p^{m+1} + 1 - p^m\right)^{n-k} \\
= \; & \binom{n}{k} p^{(m+1)k} \left(1 - p^{m+1}\right)^{n-k},
\end{aligned}$$

como se quería.

Q.E.D.

Demostración 2. Se trata nuevamente de hacer inducción sobre m, usando ahora argumentos de probabilidad para validar las etapas de la inducción. La variable p que aparece en la identidad por demostrar será una probabilidad (de hecho ambos miembros de la identidad serán probabilidades), por lo que demostraremos que (3.1) se cumple para toda p en el intervalo $[0,1]$ (y que ambos miembros de (3.1) son también números de este intervalo). Viendo (3.1) como una identidad de polinomios de la variable real p (que mandan el intervalo $[0,1]$ en él mismo), demostraremos entonces que estos polinomios son idénticos para $p \in [0,1]$. Serán entonces idénticos para toda $p \in \mathbb{R}$.

Supongamos que se lanzan n monedas, cada una de las cuales muestra cara con probabilidad p. Si $X^{(1)}$ es el número de caras obtenido en este primer lanzamiento se tiene $X^{(1)} \sim \operatorname{Bin}(n,p)$, de modo que $P\left(X^{(1)}=k\right) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Aquellas monedas que mostraron cara en el primer lanzamiento se vuelven a lanzar. Si $X^{(2)}$ es el número de caras obtenido en el segundo lanzamiento, la probabilidad $P\left(X^{(2)}=k\right)$ la podemos calcular de dos maneras:

(a) Viendo a $X^{(2)}$ como una variable aleatoria binomial, en donde éxito significa que una moneda mostró caras en el primero y en el segundo lanzamientos. Esto ocurre con probabilidad p^2 (es la probabilidad de la intersección de los eventos $\{$cara en el primer lanzamiento$\}$ y $\{$cara en el segundo lanzamiento$\}$, cada uno de ellos con probabilidad p; siendo estos eventos independientes, la probabilidad de la intersección es p^2). Es decir que $X^{(2)} \sim \operatorname{Bin}\left(n,p^2\right)$, de modo que $P\left(X^{(2)}=k\right) = \binom{n}{k}p^{2k}\left(1-p^2\right)^{n-k}$.

(b) Condicionando sobre el número de caras obtenidas en el primer lanzamiento, la ley de probabilidad total nos dice que la probabilidad $P\left(X^{(2)}=k\right)$ es $P\left(X^{(2)}=k\right) = \sum_{j_1=0}^{n} P\left(X^{(2)}=k \mid X^{(1)}=j_1\right) P\left(X^{(1)}=j_1\right)$. Pero ciertamente $P\left(X^{(2)}=k \mid X^{(1)}=j_1\right) = 0$ si $j_1 < k$, de modo que $P\left(X^{(2)}=k\right) = \sum_{j_1=k}^{n} P\left(X^{(2)}=k \mid X^{(1)}=j_1\right) P\left(X^{(1)}=j_1\right)$, en donde $P\left(X^{(1)}=j_1\right) = \binom{n}{j_1}p^{j_1}(1-p)^{n-j_1}$ y $P\left(X^{(2)}=k \mid X^{(1)}=j_1\right) = \binom{j_1}{k}p^k(1-p)^{j_1-k}$. Así pues, se tiene que $P\left(X^{(2)}=k\right) = \sum_{j_1=k}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{k}p^{k+j_1}(1-p)^{n-k}$.

Estas dos maneras de obtener $P\left(X^{(2)}=k\right)$ nos dicen que

$$\sum_{j_1=k}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{k}p^{k+j_1}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^{2k}\left(1-p^2\right)^{n-k},$$

lo que muestra la identidad (3.1) en el caso $m=2$.

Supongamos entonces válida la identidad (3.1) para una $m>2$ cualquiera, y veamos su validez para $m+1$. Si las monedas que mostraron cara en el segundo lanzamiento las volvemos a lanzar, y las monedas que muestran cara en este tercer lanzamiento las lanzamos de nuevo, podemos continuar hasta un m-ésimo lanzamiento y calcular la probabilidad de que el número de caras en este lanzamiento sea k, $0 \leq k \leq n$. La hipótesis de inducción nos dice entonces que si $X^{(m)}$ es el número de caras obtenidas en el m-ésimo lanzamiento, la probabilidad $P\left(X^{(m)}=k\right) = \binom{n}{k}p^{mk}\left(1-p^m\right)^{n-k}$ se puede calcular con la expresión del lado izquierdo de (3.1). Si lanzamos las monedas que mostraron cara en el m-ésimo lanzamiento, y $X^{(m+1)}$ es el número de caras obtenidas en este nuevo lanzamiento, tenemos por una parte que $P\left(X^{(m+1)}=k\right) = \binom{n}{k}p^{(m+1)k}\left(1-p^{m+1}\right)^{n-k}$. Por otra parte, condicionando sobre el número de caras obtenidas en el m-ésimo lanzamiento, tenemos según la ley de probabilidad total que $P\left(X^{(m+1)}=k\right) = \sum_{j_m=k}^{n} P\left(X^{(m+1)}=k \mid X^{(m)}=j_m\right) P\left(X^{(m)}=j_m\right)$, en donde (por la hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned} & P\left(X^{(m)}=j_m\right) \\ = & \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{j_m+\sum_{i=1}^{m-1} j_i}(1-p)^{n-j_m}, \end{aligned}$$

y $P\left(X^{(m+1)}=k \mid X^{(m)}=j_m\right) = \binom{j_m}{k}p^k(1-p)^{j_m-k}$. Entonces

$$\begin{aligned} & P\left(X^{(m+1)}=k\right) \\ = & \sum_{j_m=k}^{n} P\left(X^{(m+1)}=k \mid X^{(m)}=j_m\right) P\left(X^{(m)}=j_m\right) \\ = & \sum_{j_m=k}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k} p^{k+\sum_{i=1}^{m} j_i}(1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{j_m=k}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k} p^{k+\sum_{i=1}^{m} j_i}(1-p)^{n-k} \\ = & \binom{n}{k}p^{(m+1)k}\left(1-p^{m+1}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

lo que muestra (3.1) para $m+1$.

Q.E.D.

Dividiendo entre $(1-p)^{n-k}$ ambos miembros de (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{m-1}=k}^{n} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{k} p^{\sum_{i=1}^{m-1} j_i} \\ = & \binom{n}{k}p^{(m-1)k}\left(\sum_{i=0}^{m-1} p^i\right)^{n-k}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Consideremos ahora el siguiente problema más general. Sea $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_m$, en donde $\mathfrak{r}_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Se tienen n monedas que se lanzan

$\mathfrak{r}_1$ veces. En cada uno de estos lanzamientos las monedas muestran cara con probabilidad p_1. Las monedas que mostraron cara en el $\mathfrak{r}_1$-ésimo lanzamiento, se lanzan $\mathfrak{r}_2$ veces. En estos nuevos lanzamientos las monedas muestran cara con probabilidad p_2. Las monedas que mostraron cara en el $(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$-ésimo lanzamiento, se lanzan ahora $\mathfrak{r}_3$ veces. En cada uno de estos lanzamientos las monedas muestran cara con probabilidad p_3. Siguiendo de esta manera, las monedas que mostraron cara en el $(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_{m-1})$-ésimo lanzamiento, se lanzan ahora $\mathfrak{r}_m$ veces. En cada uno de estos lanzamientos las monedas muestran cara con probabilidad p_m. Se quiere calcular el número de caras en el $\mathfrak{r}$-ésimo lanzamiento. El problema que consideramos anteriormente corresponde al caso en que $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \cdots = \mathfrak{r}_m = 1$ y $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = p$.

Si $X^{(\mathfrak{r}_1)}$ es el número de caras en el $\mathfrak{r}_1$-ésimo lanzamiento, se tiene $X^{(\mathfrak{r}_1)} \sim \operatorname{Bin}(n, p_1^{\mathfrak{r}_1})$, de modo que $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1)} = k\right) = \binom{n}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{n-k}$. Similarmente, si $X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)}$ es el número de caras en el $(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$-ésimo lanzamiento, tenemos por una parte que $X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} \sim \operatorname{Bin}(n, p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2})$, de modo que $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} = k\right) = \binom{n}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 k} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{n-k}$. Por otra parte, la ley de probabilidad total nos dice que $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} = k\right) = \sum_{j_1=k}^{n} P\left(X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} = k \mid X^{(\mathfrak{r}_1)} = j_1\right) P\left(X^{(\mathfrak{r}_1)} = j_1\right)$, en donde $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1)} = j_1\right) = \binom{n}{j_1} p_1^{\mathfrak{r}_1 j_1} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{n-j_1}$ y $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} = k \mid X^{(\mathfrak{r}_1)} = j_1\right) = \binom{j_1}{k} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \left(1 - p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{j_1-k}$, de modo que la probabilidad $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} = k\right)$ nos queda como $P\left(X^{(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)} = k\right) = \sum_{j_1=k}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 j_1} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{n-j_1} \left(1 - p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{j_1-k}$. Obtenemos entonces la identidad

$$\begin{aligned}
& \sum_{j_1=k}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 j_1} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{n-j_1} \left(1 - p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{j_1-k} \\
= & \binom{n}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 k} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Siguiendo de esta manera, podemos calcular la probabilidad $P\left(X^{(\mathfrak{r})} = k\right)$ de dos maneras distintas para obtener la identidad

$$\begin{aligned}
& \sum_{j_{m-1}=k}^{n} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{k} \\
& \cdot p_1^{\mathfrak{r}_1 j_1} p_2^{\mathfrak{r}_2 j_2} \cdots p_{m-1}^{\mathfrak{r}_{m-1} j_{m-1}} p_m^{\mathfrak{r}_m k} \\
& \cdot \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{n-j_1} \left(1 - p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{j_1-j_2} \cdots \left(1 - p_m^{\mathfrak{r}_m}\right)^{j_{m-1}-k} \\
= & \binom{n}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 k} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m}\right)^{n-k}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(La cual puede validarse con un argumento similar al usado en la demostración (2) del Teorema (3.1).)

Si $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \cdots = \mathfrak{r}_m = r$ y $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = p$, (3.3) se ve como

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{m-1}=k}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{k} \qquad (3.4)\\
&\cdot p^{r\left(k+\sum_{i=1}^{m-1} j_i\right)}\left(1-p^r\right)^{n-k}\\
= &\binom{n}{k}p^{mrk}\left(1-p^{mrk}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

(Observe que si además ponemos $r=1$ en (3.4), obtenemos (3.1).)

Podemos combinar (3.4) con (3.1) (junto con el hecho trivial $(p^r)^m=(p^m)^r$) para escribir

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{m-1}=k}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{k}p^{r\left(k+\sum\limits_{i=1}^{m-1} j_i\right)}\left(1-p^r\right)^{n-k}\\
= &\sum_{j_{r-1}=k}^{n}\sum_{j_{r-2}=j_{r-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{r-1}}{k}p^{m\left(k+\sum\limits_{i=1}^{r-1} j_i\right)}\left(1-p^m\right)^{n-k}\\
= &\binom{n}{k}p^{rmk}\left(1-p^{rm}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Más generalmente, si $m=m_1m_2\cdots m_s$, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\left(1-p^{\widehat{m_1}m_2\cdots m_s}\right)^{n-k}\sum_{j_{m_1-1}=k}^{n}\sum_{j_{m_1-2}=j_{m_1-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\\
&\cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_1-1}}{k}p^{\widehat{m_1}m_2\cdots m_s\left(k+\sum_{i=1}^{m_1-1} j_i\right)}\\
= &\left(1-p^{m_1\widehat{m_2}\cdots m_s}\right)^{n-k}\sum_{j_{m_2-1}=k}^{n}\sum_{j_{m_2-2}=j_{m_2-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\\
&\cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_2-1}}{k}p^{m_1\widehat{m_2}\cdots m_s\left(k+\sum_{i=1}^{m_2-1} j_i\right)}\\
= &\cdots\\
= &\left(1-p^{m_1m_2\cdots\widehat{m_s}}\right)^{n-k}\sum_{j_{m_s-1}=k}^{n}\sum_{j_{m_s-2}=j_{m_s-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_s-1}}{k}\\
&\cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_s-1}}{k}p^{m_1m_2\cdots\widehat{m_s}\left(k+\sum_{i=1}^{m_s-1} j_i\right)}\\
= &\binom{n}{k}p^{m_1m_2\cdots m_sk}\left(1-p^{m_1m_2\cdots m_s}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Dividiendo esta expresión entre $1-p$ nos queda

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=0}^{\widehat{m_1}m_2\cdots m_s-1} p^i\right)^{n-k} \sum_{j_{m_1-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_1-2}=j_{m_1-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \\
& \cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_1-1}}{k} p^{\widehat{m_1}m_2\cdots m_s\left(k+\sum_{i=1}^{m_1-1} j_i\right)} \\
= & \left(\sum_{i=0}^{m_1\widehat{m_2}\cdots m_s-1} p^i\right)^{n-k} \sum_{j_{m_2-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_2-2}=j_{m_2-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \\
& \cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_2-1}}{k} p^{m_1\widehat{m_2}\cdots m_s\left(k+\sum_{i=1}^{m_2-1} j_i\right)} \\
= & \cdots \\
= & \left(\sum_{i=0}^{m_1 m_2\cdots\widehat{m_s}-1} p^i\right)^{n-k} \sum_{j_{m_s-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_s-2}=j_{m_s-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \\
& \cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_s-1}}{k} p^{m_1 m_2\cdots\widehat{m_s}\left(k+\sum_{i=1}^{m_s-1} j_i\right)} \\
= & \binom{n}{k} p^{m_1 m_2\cdots m_s k}\left(\sum_{i=0}^{m_1 m_2\cdots m_s-1} p^i\right)^{n-k}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Por ejemplo, si $s = 3$ y $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$, tenemos la identidad

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=0}^{19} p^i\right)^{n-k} \sum_{j_2=k}^{n} \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\binom{j_2}{k} p^{20(k+j_1+j_2)} \\
= & \left(\sum_{i=0}^{14} p^i\right)^{n-k} \sum_{j_3=k}^{n} \sum_{j_2=j_3}^{n} \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\binom{j_2}{j_3}\binom{j_3}{k} p^{15(k+j_1+j_2+j_3)} \\
= & \left(\sum_{i=0}^{11} p^i\right)^{n-k} \sum_{j_4=k}^{n} \sum_{j_3=j_4}^{n} \sum_{j_2=j_3}^{n} \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\binom{j_2}{j_3}\binom{j_3}{j_4}\binom{j_4}{k} p^{12(k+j_1+j_2+j_3+j_4)} \\
= & \binom{n}{k} p^{60k}\left(\sum_{i=0}^{59} p^i\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Si ponemos $p = 1$ en (3.5) nos queda

$$
\begin{aligned}
& (\widehat{m_1} m_2 \cdots m_s)^{n-k} \sum_{j_{m_1-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_1-2}=j_{m_1-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_1-1}}{k} \\
= \;& (m_1 \widehat{m_2} \cdots m_s)^{n-k} \sum_{j_{m_2-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_2-2}=j_{m_2-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_2-1}}{k} \\
= \;& \cdots \\
= \;& (m_1 m_2 \cdots \widehat{m_s})^{n-k} \sum_{j_{m_s-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_s-2}=j_{m_s-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_s-1}}{k} \\
= \;& \binom{n}{k} (m_1 m_2 \cdots m_s)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

En particular (con $s=2$) vemos que para cualesquiera $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
& m_2^{n-k} \sum_{j_{m_1-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_1-2}=j_{m_1-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_1-1}}{k} \qquad (3.6)\\
= \;& m_1^{n-k} \sum_{j_{m_2-1}=k}^{n} \sum_{j_{m_2-2}=j_{m_2-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m_2-1}}{k} \\
= \;& \binom{n}{k} (m_1 m_2)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Podemos ir un paso más en la generalización anterior, considerando ahora d problemas similares, con el número de monedas distinto en cada uno de ellos. Digamos que tenemos d conjuntos de monedas, el i-ésimo de ellos conteniendo n_i monedas, $i = 1, 2, \ldots, d$. En cada uno de estos conuntos de monedas hacemos el procedimiento descrito en la generalización anterior: se lanzan inicialmente las monedas $\mathfrak{r}_1$ veces, las cuales muestran cara con probabilidad p_1. A aquellas monedas que mostraron cara en el $\mathfrak{r}_1$-ésimo lanzamiento, se les vuelve a lanzar ahora $\mathfrak{r}_2$ veces, y en estos lanzamientos las monedas muestran cara con probabilidad p_2. A las monedas que mostraron cara en el $(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$-ésimo lanzamiento, se les vuelve a lanzar ahora $\mathfrak{r}_3$ veces, siendo p_3 la probabilidad de mostrar cara en estos lanzamientos. Siguiendo de esta manera, se lanzan finalmente $\mathfrak{r}_m$ veces las monedas que mostraron cara en el $(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_{m-1})$-ésimo lanzamiento, siendo p_m la probabilidad de mostrar cara en estos últimos $\mathfrak{r}_m$ lanzamientos. Calculando de dos maneras distintas la probabilidad de que después del $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_m$ lanzamiento se obtengan k caras llegamos a (3.3) (con la n igual a la correspondiente n_i del conjunto de monedas considerado). Si $X^{(\mathfrak{r})}_{n_1+n_2+\cdots+n_d}$ es el número de caras que se obtienen en el $\mathfrak{r}$-ésimo lanzamiento del conjunto de $n_1 + n_2 + \cdots + n_d$ monedas, tenemos que $X^{(\mathfrak{r})}_{n_1+n_2+\cdots+n_d} \sim \operatorname{Bin}(n_1 + n_2 + \cdots + n_d, p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m})$, de modo que $P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_1+n_2+\cdots+n_d} = k\right) =$

$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_d}{k} p_1^{\mathfrak{r}_1 k} p_2^{\mathfrak{r}_2 k} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m k} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m}\right)^{n_1+n_2+\cdots+n_d-k}$. Por otra parte, con un sencillo argumento con la identidad (de convolución) de Vandermonde

$$\begin{aligned}
&\binom{n_1+n_2+\cdots+n_d}{k} \\
= \quad & \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{k} \binom{n_1}{i_1} \binom{n_2}{i_2} \cdots \binom{n_{d-1}}{i_{d-1}} \binom{n_d}{k - i_1 - i_2 - \cdots - i_{d-1}},
\end{aligned}$$

podemos ver que

$$\begin{aligned}
&P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_1+n_2+\cdots+n_d} = k\right) \\
= \quad & \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{k} P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_1} = i_1\right) P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_2} = i_2\right) \cdots \\
& P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_{d-1}} = i_{d-1}\right) P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_d} = k - i_1 - i_2 - \cdots - i_{d-1}\right),
\end{aligned}$$

en donde, según (3.3) tenemos

$$\begin{aligned}
P\left(X^{(\mathfrak{r})}_{n_t} = i_t\right) \quad = \quad & \sum_{j_{m-1,t}=i_t}^{n_t} \sum_{j_{m-2,t}=j_{m-1,t}}^{n_t} \cdots \sum_{j_{1t}=j_{2t}}^{n_t} \binom{n_t}{j_{1t}} \binom{j_{1t}}{j_{2t}} \cdots \binom{j_{m-1,t}}{i_t} \\
& \cdot p_1^{\mathfrak{r}_1 j_{1t}} p_2^{\mathfrak{r}_2 j_{2t}} \cdots p_{m-1}^{\mathfrak{r}_{m-1} j_{m-1,t}} p_m^{\mathfrak{r}_m i_t} \\
& \cdot \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{n_t - j_{1t}} \left(1 - p_2^{\mathfrak{r}_2}\right)^{j_{1t} - j_{2t}} \cdots \left(1 - p_m^{\mathfrak{r}_m}\right)^{j_{m-1,t} - i_t} \\
= \quad & \binom{n_t}{i_t} p_1^{\mathfrak{r}_1 i_t} p_2^{\mathfrak{r}_2 i_t} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m i_t} \left(1 - p_1^{\mathfrak{r}_1} p_2^{\mathfrak{r}_2} \cdots p_m^{\mathfrak{r}_m}\right)^{n_t - i_t},
\end{aligned}$$

en donde $t = 1, 2, \cdots, d$, e $i_d = k - i_1 - i_2 - \cdots - i_{d-1}$.

La identidad así obtenida es

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1=0}^{k}\sum_{i_2=0}^{k}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{k}\sum_{j_{m-1,1}=i_1}^{n_1}\sum_{j_{m-2,1}=j_{m-1,1}}^{n_1}\cdots\sum_{j_{11}=j_{21}}^{n_1}\\
&\sum_{j_{m-1,2}=i_2}^{n_2}\sum_{j_{m-2,2}=j_{m-1,2}}^{n_2}\cdots\sum_{j_{12}=j_{22}}^{n_2}\cdots\sum_{j_{m-1,d-1}=i_{d-1}}^{n_{d-1}}\sum_{j_{m-2,d-1}=j_{m-1,d-1}}^{n_{d-1}}\cdots\\
&\sum_{j_{1,d-1}=j_{2,d-1}}^{n_{d-1}}\sum_{j_{m-1,d}=k-\sum_{t=1}^{d-1}i_t}^{n_d}\sum_{j_{m-2,d}=j_{m-1,d}}^{n_d}\cdots\sum_{j_{1d}=j_{2d}}^{n_d}\\
&\binom{n_1}{j_{11}}\binom{j_{11}}{j_{21}}\cdots\binom{j_{m-1,1}}{i_1}\binom{n_2}{j_{12}}\binom{j_{12}}{j_{22}}\cdots\binom{j_{m-1,2}}{i_2}\cdots\\
&\binom{n_{d-1}}{j_{1,d-1}}\binom{j_{1,d-1}}{j_{2,d-1}}\cdots\binom{j_{m-1,d-1}}{i_{d-1}}\binom{n_d}{j_{1d}}\binom{j_{1d}}{j_{2d}}\cdots\binom{j_{m-1,d}}{k-\sum_{t=1}^{d-1}i_t}\\
&\left(\prod_{s=1}^{m-1}p_s^{\mathfrak{r}_s\sum_{t=1}^{d}j_{st}}\right)p_m^{\mathfrak{r}_m k}\left(1-p_1^{\mathfrak{r}_1}\right)^{\sum_{t=1}^{d}(n_t-j_{1t})}\\
&\left(\prod_{s=2}^{m-1}\left(1-p_s^{\mathfrak{r}_s}\right)^{\sum_{t=1}^{d}(j_{s-1,t}-j_{st})}\right)\left(1-p_m^{\mathfrak{r}_m}\right)^{\left(\sum_{t=1}^{d}j_{m-1,t}\right)-k}\\
=\;&\binom{\sum_{t=1}^{d}n_t}{k}\prod_{s=1}^{m}p_s^{\mathfrak{r}_s k}\left(1-\prod_{s=1}^{m}p_s^{\mathfrak{r}_s}\right)^{\left(\sum_{t=1}^{d}n_t\right)-k}.
\end{aligned}
$$

Si $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}_2=\cdots=\mathfrak{r}_m=r$ y $p_1=p_2=\cdots=p_m=p$, (***) se ve como

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1=0}^{k}\sum_{i_2=0}^{k}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{k}\sum_{j_{m-1,1}=i_1}^{n_1}\sum_{j_{m-2,1}=j_{m-1,1}}^{n_1}\cdots\sum_{j_{11}=j_{21}}^{n_1}\\
&\sum_{j_{m-1,2}=i_2}^{n_2}\sum_{j_{m-2,2}=j_{m-1,2}}^{n_2}\cdots\sum_{j_{12}=j_{22}}^{n_2}\cdots\sum_{j_{m-1,d-1}=i_{d-1}}^{n_{d-1}}\sum_{j_{m-2,d-1}=j_{m-1,d-1}}^{n_{d-1}}\cdots\\
&\sum_{j_{1,d-1}=j_{2,d-1}}^{n_{d-1}}\sum_{j_{m-1,d}=k-\sum_{t=1}^{d-1}i_t}^{n_d}\sum_{j_{m-2,d}=j_{m-1,d}}^{n_d}\cdots\sum_{j_{1d}=j_{2d}}^{n_d}\\
&\binom{n_1}{j_{11}}\binom{j_{11}}{j_{21}}\cdots\binom{j_{m-1,1}}{i_1}\binom{n_2}{j_{12}}\binom{j_{12}}{j_{22}}\cdots\binom{j_{m-1,2}}{i_2}\cdots\\
&\binom{n_{d-1}}{j_{1,d-1}}\binom{j_{1,d-1}}{j_{2,d-1}}\cdots\binom{j_{m-1,d-1}}{i_{d-1}}\binom{n_d}{j_{1d}}\binom{j_{1d}}{j_{2d}}\cdots\binom{j_{m-1,d}}{k-\sum_{t=1}^{d-1}i_t}\\
&p^{r\left(k+\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{t=1}^{d}j_{st}\right)}\left(1-p^r\right)^{\left(\sum_{t=1}^{d}n_t\right)-k}\\
=\;&\binom{\sum_{t=1}^{d}n_t}{k}p^{kmr}\left(1-p^{mr}\right)^{\left(\sum_{t=1}^{d}n_t\right)-k}.
\end{aligned}
$$

Nuevamente observe que las m's y las r's son intercambiables. Por ejemplo, poniendo $d = 2$ y dividiendo por $(1-p)$ podemos escribir (con m_1 y m_2 en lugar de m y r, respectivamente)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1=0}^{k}\sum_{j_{m_1-1,1}=i_1}^{n_1}\sum_{j_{m_1-2,1}=j_{m_1-1,1}}^{n_1}\cdots\sum_{j_{11}=j_{21}}^{n_1}\sum_{j_{m_1-1,2}=i_2}^{n_2}\sum_{j_{m_1-2,2}=j_{m_1-1,2}}^{n}\cdots\sum_{j_{12}=j_{22}}^{n}\\
&\binom{n_1}{j_{11}}\binom{j_{11}}{j_{21}}\cdots\binom{j_{m_1-1,1}}{i_1}\binom{n_2}{j_{12}}\binom{j_{12}}{j_{22}}\cdots\binom{j_{m_1-1,2}}{k-i_1}\\
&p^{m_2\left(k+\sum_{s=1}^{m_1-1}(j_{s1}+j_{s2})\right)}\left(\sum_{l=0}^{m_2-1}p^l\right)^{n_1+n_2-k}\\
= &\sum_{i_1=0}^{k}\sum_{j_{m_2-1,1}=i_1}^{n_1}\sum_{j_{m_2-2,1}=j_{m_2-1,1}}^{n_1}\cdots\sum_{j_{11}=j_{21}}^{n_1}\sum_{j_{m_2-1,2}=i_2}^{n_2}\sum_{j_{m_2-2,2}=j_{m_2-1,2}}^{n}\cdots\sum_{j_{12}=j_{22}}^{n}\\
&\binom{n_1}{j_{11}}\binom{j_{11}}{j_{21}}\cdots\binom{j_{m_2-1,1}}{i_1}\binom{n_2}{j_{12}}\binom{j_{12}}{j_{22}}\cdots\binom{j_{m_2-1,2}}{k-i_1}\\
&p^{m_1\left(k+\sum_{s=1}^{m_2-1}(j_{s1}+j_{s2})\right)}\left(\sum_{l=0}^{m_1-1}p^l\right)^{n_1+n_2-k}\\
= &\binom{n_1+n_2}{k}p^{km_1m_2}\left(\sum_{l=0}^{m_1m_2-1}p^l\right)^{n_1+n_2-k},
\end{aligned}$$

que con $p = 1$ se ve como

$$\begin{aligned}
&m_2^{n_1+n_2-k}\sum_{i_1=0}^{k}\sum_{j_{m_1-1,1}=i_1}^{n_1}\sum_{j_{m_1-2,1}=j_{m_1-1,1}}^{n_1}\cdots\sum_{j_{11}=j_{21}}^{n_1}\sum_{j_{m_1-1,2}=i_2}^{n_2}\sum_{j_{m_1-2,2}=j_{m_1-1,2}}^{n}\cdots\sum_{j_{12}=j_{22}}^{n}\\
&\binom{n_1}{j_{11}}\binom{j_{11}}{j_{21}}\cdots\binom{j_{m_1-1,1}}{i_1}\binom{n_2}{j_{12}}\binom{j_{12}}{j_{22}}\cdots\binom{j_{m_1-1,2}}{k-i_1}\\
= &m_1^{n_1+n_2-k}\sum_{i_1=0}^{k}\sum_{j_{m_2-1,1}=i_1}^{n_1}\sum_{j_{m_2-2,1}=j_{m_2-1,1}}^{n_1}\cdots\sum_{j_{11}=j_{21}}^{n_1}\sum_{j_{m_2-1,2}=i_2}^{n_2}\sum_{j_{m_2-2,2}=j_{m_2-1,2}}^{n}\cdots\sum_{j_{12}=j_{22}}^{n}\\
&\binom{n_1}{j_{11}}\binom{j_{11}}{j_{21}}\cdots\binom{j_{m_2-1,1}}{i_1}\binom{n_2}{j_{12}}\binom{j_{12}}{j_{22}}\cdots\binom{j_{m_2-1,2}}{k-i_1}\\
= &\binom{n_1+n_2}{k}(m_1m_2)^{n_1+n_2-k},
\end{aligned}$$

la cual es una identidad análoga a (3.6).

4 Algunos corolarios

Otras consecuencias interesantes vienen en el siguiente resultado.

Corolario 4.1 *Para cualesquier $n, m, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, se tiene*
(a)

$$\sum_{j_{2m-1}=k}^{n} \sum_{j_{2m-2}=j_{2m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{2m-1}}{k} (-1)^{k+\sum_{i=1}^{2m-1} j_i} = \delta_{nk}. \tag{4.1}$$

(b)

$$\sum_{j_{2m}=k}^{n} \sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{2m}}{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i} = \binom{n}{k}. \tag{4.2}$$

Demostración.
(a) Observe que si $k = n$ el miembro izquierdo de (4.1) es igual a 1. Si $k \neq n$, la identidad (3.2) con $2m - 1$ en lugar de m y $p = -1$ se ve como

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{2m-1}=k}^{n} \sum_{j_{2m-2}=j_{2m-1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{2m-1}}{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{2m-1} j_i} \\ = & \binom{n}{k} (-1)^{(2m-1)k} \left(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i \right)^{n-k} = 0, \end{aligned}$$

lo que termina de mostrar (4.1).
(b) En (3.2) escribimos $2m$ en lugar de m y $p = -1$ para obtener

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{2m}=k}^{n} \sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{2m}}{k} (-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i} \\ = & \binom{n}{k} (-1)^{2mk} \left(\sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \right)^{n-k} = \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

lo que prueba (4.2).

Q.E.D.

Una consecuencia de (4.1) es que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, entonces para cualquier $l = 0, 1, ..., n$ se tiene

$$\sum_{j_{2m}=l}^{n} \sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} f(j_{2m}) \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{2m-1}}{j_{2m}} (-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i} = f(n).$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m}=l}^{n}\sum_{j_{2m-2}=j_{2m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} f\left(j_{2m}\right)\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m-1}}{j_{2m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i} \\
=\;& \sum_{j_{2m}=l}^{n} f\left(j_{2m}\right)\left(\sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m-1}}{j_{2m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i}\right) \\
=\;& \sum_{j_{2m}=l}^{n} f\left(j_{2m}\right)\delta_{n,j_{2m}} \\
=\;& f(n).
\end{aligned}
$$

Observe también que una consecuencia de (4.2) (sumando desde $k=0$ hasta $k=n$ en ambos miembros de ella) es la siguiente expresión para 2^n

$$
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j_{2m}=k}^{n}\sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{k}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i}=2^n.
$$

Corolario 4.2 *Para cualesquier $n,m,k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le n$, se tiene*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=k}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \qquad (4.3)\\
=\;& p^{m(n+k)}\sum_{j_m=k}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k}p^{-\sum_{i=1}^{m} j_i}.
\end{aligned}
$$

Demostración. En (3.2) escriba p^{-1} en lugar de p para obtener

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=k}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k}p^{-\sum_{i=1}^{m} j_i} \\
=\;& \binom{n}{k}p^{-mk}\left(\sum_{i=0}^{m}p^{-i}\right)^{n-k} \\
=\;& \binom{n}{k}p^{-m(n-k)}p^{-mk}\left(\sum_{i=0}^{m}p^{m-i}\right)^{n-k} \\
=\;& \binom{n}{k}p^{-mn}\left(\sum_{i=0}^{m}p^{i}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

de modo que, usando nuevamente (3.2) nos queda

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=k}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k}p^{-\sum_{i=1}^{m}j_i}\\
= &\ p^{-mn}p^{-mk}\sum_{j_m=k}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k}p^{\sum_{i=1}^{m}j_i}
\end{aligned}
$$

de donde se obtiene (4.3).

Q.E.D.

Corolario 4.3 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, m primo impar. Si $p_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz m-ésima primitiva de la unidad, se tiene*

$$
\sum_{j_m=0}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p_0^{(1-m)j_m+\sum_{i=1}^{m-1}j_i}=1. \tag{4.4}
$$

Demostración. Escriba (3.2) como

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{(1-m)j_m+\sum_{i=1}^{m-1}j_i}\\
= &\ \binom{n}{j_m}\left(\Phi_m\left(p\right)\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

en donde $\Phi_m(p) = 1 + p + \cdots + p^{m-1}$ es el m-ésimo polinomio ciclotómico. Sume desde $j_m = 0$ hasta $j_m = n$ para obtener

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=0}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{(1-m)j_m+\sum_{i=1}^{m-1}j_i}\\
= &\ \left(1+\Phi_m\left(p\right)\right)^n.
\end{aligned}
$$

El resultado se sigue al observar que, siendo m primo impar, las raíces del polinomio ciclotómico $\Phi_m(p)$ son justamente las raíces m-ésimas primitivas de la unidad.

Q.E.D.

Ahora explotaremos la parte de probabilidad para obtener más resultados.

Corolario 4.4
(a) Para cualesquier $n, m, N \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $0 \leq N \leq n$, se tiene

$$\sum_{j_m=0}^{N}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum\limits_{i=1}^{m}j_i}(1-p)^{n-j_m}$$
$$= \sum_{j=n-N}^{n}\binom{n}{j}p^{m(n-j)}\left(1-p^m\right)^j . \tag{4.5}$$

(b) Para cualesquier $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, se tiene

$$\sum_{j_m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{j_{m-1}=2j_m}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{2j_m}p^{2j_m+\sum\limits_{i=1}^{m-1}j_i}(1-p)^{n-2j_m}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\left(1-2p^m\right)^n\right). \tag{4.6}$$

Demostración.

(a) Si $X \sim \mathrm{Bin}\,(n, p^m)$ y $0 \leq N \leq n$, la probabilidad acumulada $P\,(X \leq N)$ se calcula como $P\,(X \leq N) = I_{1-p^m}\,(n-N, N+1)$, en donde $I_x\,(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^x t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,dt$, $0 \leq x \leq 1$, $B\,(\alpha, \beta)$ es la función beta, e $I_x\,(\alpha, \beta)$ es la función beta incompleta regularizada (ver [A-S], pp. 258, 944, 945). Usando que $I_x\,(\alpha, \beta) = \sum_{j=\alpha}^{\alpha+\beta-1}\binom{\alpha+\beta-1}{j}x^j\,(1-x)^{\alpha+\beta-1-j}$, tenemos entonces que $P\,(X \leq N) = I_{1-p^m}\,(n-N, N+1) = \sum_{j=n-N}^{n}\binom{n}{j}p^{m(n-j)}\,(1-p^m)^j$. Finalmente observe que según (3.2) el miembro izquierdo de (4.4) es justamente $P\,(X \leq N)$ en donde $X \sim \mathrm{Bin}\,(n, p^m)$.

(b) Si $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n, p)$, la probabilidad de tener un número par de éxitos es[3] $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} P\,(Y = 2j) = \frac{1}{2}\,(1 + (1-2p)^n)$. Esta fórmula es justamente (4.6) para $X \sim \mathrm{Bin}\,(n, p^m)$, pues según (3.2) el miembro izquierdo de (4.6) es igual a $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} P\,(X = 2j)$ (en donde escribimos j_m en lugar de j).

Q.E.D.

Observe que cuando $N = n$, (4.5) se ve como

$$\sum_{j_m=0}^{n}\sum_{j_{m-1}=k}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m}j_i}\,(1-p)^{n-k} = 1.$$

[3] Sea E_n el evento en el que se obtienen un número par de éxitos en las n pruebas. Llamemos π_n a $P\,(E_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} P\,(X = 2j)$. Sabiendo que en la primera prueba se obtuvo el evento $A =$ éxito (con probabilidad p), el evento E_n ocurre si y solamente si el número de éxitos en las $n-1$ pruebas restantes es impar. O sea que $P\,(E_n \mid A) = P\left(E_{n-1}^c\right) = 1 - P\,(E_{n-1}) = 1 - \pi_{n-1}$. Similarmente, sabiendo que en la primera prueba se obtuvo el evento $B =$ fracaso (con probabilidad $1-p$), el evento E_n ocurre si y solamente si el evento E_{n-1} ocurre. Es decir que $P\,(E_n \mid B) = P\,(E_{n-1}) = \pi_{n-1}$. La ley de probabilidad total nos dice que $\pi_n = p\,(1-\pi_{n-1}) + \pi_{n-1}\,(1-p)$. Esta última expresión es una ecuación en diferencias que puede resolverse para π_n usando la obvia condición inicial $\pi_0 = 1$. El resultado es $\pi_n = \frac{1}{2}\,(1 + (1-2p)^n)$.

Corolario 4.5 (Momentos Binomial) *Para cualesquier $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, se tiene*

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^r \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}(1-p)^{n-j_m} \\
= \;& \sum_{i=1}^{r} \mathcal{S}(r,i)\,(n)_i\, p^{mi}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{(r)} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}(1-p)^{n-j_m} \\
= \;& \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} (-1)^{r-k}\, s(r,k)\,\mathcal{S}(k,j)\,(n)_j\, p^{mj}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_m=r}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}\binom{j_m}{r} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}(1-p)^{n-j_m} \\
= \;& \binom{n}{r} p^{mr}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}\binom{j_m+r-1}{r} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}(1-p)^{n-j_m} \\
= \;& \sum_{k=1}^{r} \binom{r-1}{k-1}\binom{n}{k} p^{mk}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Demostración. Para $X \sim \operatorname{Bin}(n, p^m)$, tenemos según (2.13), (2.14b), (2.15b) y (2.16,b) que

$$\sum_{k=1}^{n} k^r \binom{n}{k} p^{mk}(1-p^m)^k = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{S}(r,i)\,(n)_i\, p^{mi},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{(r)} \binom{n}{k} p^{mk}(1-p^m)^{n-k} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} (-1)^{r-k}\, s(r,k)\,\mathcal{S}(k,j)\,(n)_j\, p^{mj},$$

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r} p^{mk}(1-p^m)^{n-k} = \binom{n}{r} p^{mr},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+r-1}{r}\binom{n}{k} p^{mk}(1-p^m)^{n-k} = \sum_{k=1}^{r} \binom{r-1}{k-1}\binom{n}{k} p^{mk},$$

respectivamente. Usando (3.1) en cada una de estas expresiones, y escribiendo j_m en lugar de k, obtenemos (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10), respectivamente.

Q.E.D.

Si Y es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros (κ, p^m), tenemos que $P(Y=y) = \binom{y+\kappa-1}{\kappa-1} p^{m\kappa}(1-p^m)^y$, en donde $y = 0, 1, \ldots$. Cambiando y por n según $n = y+\kappa$, podemos escribir $P(Y=y)$ como

$$P(Y = n-\kappa) = \binom{n-1}{\kappa-1} p^{m\kappa}(1-p^m)^{n-\kappa},$$

de modo que, según (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
&P(Y=n-\kappa) = \binom{n-1}{\kappa-1} p^{m\kappa}(1-p^m)^{n-\kappa} \\
=\ & p^m \binom{n-1}{\kappa-1} p^{m(\kappa-1)}(1-p^m)^{n-1-(\kappa-1)} \\
=\ & p^m \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{n-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n-1} \binom{n-1}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\kappa-1+\sum_{i=1}^{m-1} j_i}(1-p)^{n-\kappa},
\end{aligned}$$

y por lo tanto (regresando a la variable original y)

$$\begin{aligned}
&P(Y=y) \\
=\ & p^m \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{y+\kappa-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{y+\kappa-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{y+\kappa-1} \binom{y+\kappa-1}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\kappa-1+\sum_{i=1}^{m-1} j_i}(1-p)^{y}.
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\binom{y+\kappa-1}{\kappa-1} p^{m\kappa}(1-p^m)^y \qquad (4.11)\\
=\ & p^{m+\kappa-1} \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{y+\kappa-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{y+\kappa-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{y+\kappa-1} \binom{y+\kappa-1}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\sum_{i=1}^{m-1} j_i}(1-p)^{y}.
\end{aligned}$$

Corolario 4.6 (Momentos Binomial Negativa) *Para cualesquier $m, r, \kappa, k \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$, se tiene*

$$
\begin{aligned}
& p^{m+\kappa-1} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{y+\kappa-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{y+\kappa-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{y+\kappa-1} \\
& \cdot y^k \binom{y+\kappa-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\sum_{i=1}^{m-1} j_i} (1-p)^y \\
= \; & \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(k,j) \frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!} \left(\frac{1-p^m}{p^m} \right)^j .
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
& p^{m+\kappa-1} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{y+\kappa-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{y+\kappa-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{y+\kappa-1} \\
& \cdot y^{(k)} \binom{y+\kappa-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\sum_{i=1}^{m-1} j_i} (1-p)^y \\
= \; & \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{k-i} s(k,i) \mathcal{S}(i,j) \frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!} \left(\frac{1-p^m}{p^m} \right)^j .
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

$$
\begin{aligned}
& p^{m+\kappa-1} \sum_{y=k}^{\infty} \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{y+\kappa-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{y+\kappa-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{y+\kappa-1} \\
& \cdot \binom{y}{k} \binom{y+\kappa-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\sum_{i=1}^{m-1} j_i} (1-p)^y \\
= \; & \binom{k+\kappa-1}{k} \left(\frac{1-p^m}{p^m} \right)^k .
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

$$
\begin{aligned}
& p^{m+\kappa-1} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{j_{m-1}=\kappa-1}^{y+\kappa-1} \sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{y+\kappa-1} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{y+\kappa-1} \\
& \cdot \binom{y+k-1}{k} \binom{y+\kappa-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{\kappa-1} p^{\sum_{i=1}^{m-1} j_i} (1-p)^y \\
= \; & \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \binom{j+\kappa-1}{j} \left(\frac{1-p^m}{p^m} \right)^j .
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Demostración. Según (2.18), (2.19b), (2.20b) y (2.21b), tenemos que si $Y \sim \mathrm{BinNeg}(\kappa, p^m)$, entonces

$$
\sum_{j=1}^{\infty} j^k \binom{j+\kappa-1}{\kappa-1} p^{m\kappa} (1-p^m)^j = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(k,j) \frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!} \left(\frac{1-p^m}{p^m} \right)^j ,
$$

$$\begin{aligned}&\sum_{y=1}^{\infty} y^{(k)}\binom{y+\kappa-1}{\kappa-1}p^{m\kappa}\left(1-p^m\right)^y\\ =\ &\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{k-i}\,s\left(k,i\right)\mathcal{S}\left(i,j\right)\frac{(j+\kappa-1)!}{(\kappa-1)!}\left(\frac{1-p^m}{p^m}\right)^j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{y=k}^{\infty}\binom{y}{k}\binom{y+\kappa-1}{\kappa-1}p^{m\kappa}\left(1-p^m\right)^y\\ =\ &\binom{k+\kappa-1}{k}\left(\frac{1-p^m}{p^m}\right)^k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}\binom{j+k-1}{k}\binom{j+\kappa-1}{\kappa-1}p^{m\kappa}\left(1-p^m\right)^j\\ =\ &\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{j+\kappa-1}{j}\left(\frac{1-p^m}{p^m}\right)^j,\end{aligned}$$

respectivamente. Usando (4.11) en cada una de estas expresiones, obtenemos (4.12), (4.13), (4.14) y (4.15), respectivamente.

Q.E.D.

5 Otros resultados

Apoyados en (3.1) hemos obtenido la fórmula (4.7), la cual escencialmente es la fórmula (2.13) sobre los momentos potenciales de $X \sim \mathrm{Bin}\left(n, p^m\right)$. Dividiendo (3.1) por $(1-p)$ obtuvimos (3.2). Una pregunta natural es si, apoyándonos en (3.2), se puede obtener una fórmula análoga a (4.7). La respuesta es afirmativa y está contenida en el siguiente resultado.

Estaremos usando (3.2) como

$$\begin{aligned}&\sum_{j_m=k}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_m}{k}p^{\sum_{i=1}^{m}j_i}\\ =\ &\binom{n}{k}p^{mk}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Teorema 5.1 *Para cualesquier $n, k, m \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^k \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^m j_i} \tag{5.2}$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(k,j)(n)_j\, p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-j}.$$

Demostración. Por inducción sobre k. Poniendo $k=1$ en (5.1) tenemos

$$\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^m j_i}$$
$$= np^m\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-1}.$$

Pero $np^m\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-1} = \mathcal{S}(1,1)(n)_1\, p^m\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-1}$, lo que muestra (5.2) en el caso $k=1$. Supongamos válido el resultado para todo entero positivo $\leq k$, y probémoslo para $k+1$. Consideramos los dos caso $k<n$ y $k\geq n$. Si $k<n$, tenemos $k+1\leq n$ y entonces podemos escribir (5.1) como

$$\sum_{j_m=k+1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}(j_m)_{k+1}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^m j_i}$$
$$= (n)_{k+1}\, p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k-1},$$

o bien

$$\sum_{j_m=k+1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\left(j_m^{k+1}+\sum_{l=1}^{k}s(k+1,l)\, j_{m-1}^{l}\right)\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}$$
$$= (n)_{k+1}\, p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k-1}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{k+1}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & (n)_{k+1}\, p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-k-1}\\
& -\sum_{l=1}^{k} s\,(k+1,l)\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{l}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum\limits_{i=1}^{m} j_i}
\end{aligned}
$$

de modo que al usar la hipótesis de inducción nos queda

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{k+1}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & (n)_{k+1}\, p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-k-1}\\
& -\sum_{l=1}^{k} s\,(k+1,l)\sum_{j=1}^{l}\mathcal{S}\,(l,j)\,(n)_j\, p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-j}\\
= \quad & (n)_{k+1}\, p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-k-1}\\
& -\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} s\,(k+1,l)\,\mathcal{S}\,(l,j)\,(n)_j\, p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-j}\\
= \quad & (n)_{k+1}\, p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-k-1}\\
& -\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{l=j}^{k} s\,(k+1,l)\,\mathcal{S}\,(l,j)\right)(n)_j\, p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m} p^i\right)^{n-j}
\end{aligned}
$$

Pero, según (2.3) tenemos que

$$
\sum_{l=j}^{k} s\,(k+1,l)\,\mathcal{S}\,(l,j) = -s\,(k+1,k+1)\,\mathcal{S}\,(k+1,j) = -\mathcal{S}\,(k+1,j)\,.
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{k+1}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & (n)_{k+1}\,p^{m(k+1)}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k-1}+\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)(n)_j\,p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-j}\\
= \quad & \sum_{j=1}^{k+1}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)(n)_j\,p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-j},
\end{aligned}
$$

lo que termina la demostración en este caso.

Consideremos ahora el caso $k \geq n$. Suponiendo válido el resultado para todo entero no negativo $\leq k$ en donde $k \geq n$, veamos su validez para $k+1$. Usando que $(j_m)_j = 0$ para $j > j_m$, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{k+1}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & \sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\mathcal{S}\left(k+1,i\right)(j_m)_i\right)\\
& \cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & \sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)(j_m)_j\right)\\
& \cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & \sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)\sum_{t=1}^{j}s\left(j,t\right)j_m^t\right)\\
& \cdot\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i}\\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{j}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)s\left(j,t\right)\sum_{j_{m-1}=1}^{n}\sum_{j_{m-2}=j_{m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\\
& \cdot j_m^t\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i},
\end{aligned}
$$

de modo que al usar la hipótesis de inducción y (2.3) nos queda

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{k+1}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{j}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)s\left(j,t\right)\sum_{k=1}^{t}\mathcal{S}\left(t,k\right)\left(n\right)_k p^{mk}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)\sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{t=k}^{j}s\left(j,t\right)\mathcal{S}\left(t,k\right)\right)\left(n\right)_k p^{mk}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)\sum_{k=1}^{j}\delta_{jk}\left(n\right)_k p^{mk}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-k} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)\left(n\right)_j p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-j} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{k+1}\mathcal{S}\left(k+1,j\right)\left(n\right)_j p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-j},
\end{aligned}
$$

como se quería.

Q.E.D.

Así como el Teorema 5.1 nos da una fórmula análoga a (4.7) (en donde usamos (5.1) en lugar de (3.1)), el siguiente teorema nos da una fórmula análoga a (4.8).

Teorema 5.2 *Para cualesquier* $n, k, m \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{(k)}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \qquad (5.3)\\
= \quad & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\left(-1\right)^{k-i}s\left(k,i\right)\mathcal{S}\left(i,j\right)\left(n\right)_j p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^i\right)^{n-j}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Usando (2.1) y (5.2) tenemos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} j_m^{(k)} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \\
= & \sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} s(k,i) j_m^i \right] \\
& \cdot \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \\
= & \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} s(k,i) \sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \\
& \cdot j_m^k \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{j_m} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \\
= & \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} s(k,i) \sum_{j=1}^{i} \mathcal{S}(i,j) (n)_j \, p^{mj} \left(\sum_{j=0}^{m} p^j \right)^{n-j} \\
= & \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{k-i} s(k,i) \mathcal{S}(i,j) (n)_j \, p^{mj} \left(\sum_{i=0}^{m} p^i \right)^{n-j} .
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

En el siguiente resultado tenemos ahora una fórmula análoga a (4.10)

Teorema 5.3 *Para cualesquier* $n, k, m \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{m-1}}{j_m} \binom{j_m + k - 1}{k} p^{\sum_{i=1}^{m} j_i} \qquad (5.4) \\
= & \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \binom{n}{j} p^{mj} \left(\sum_{i=0}^{m} p^i \right)^{n-j} . \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Demostración. Según [H-L], fórmula (15), tenemos

$$
\binom{j_m + k - 1}{k} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} \binom{j_m}{j} .
$$

Entonces, según (3.3) tenemos

$$\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}\binom{j_m+k-1}{k}p^{\sum_{i=1}^{m}j_i}$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}\binom{j_m}{j}p^{\sum_{i=1}^{m}j_i}$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^{mj}\left(\sum_{i=0}^{m}p^{i}\right)^{n-j}.$$

Q.E.D.

Corolario 5.1 *Para cualesquier $n,k,m\in\mathbb{N}$ se tiene*
(a)

$$\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_m^k\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}=\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}\left(k,j\right)\left(n\right)_j\left(m+1\right)^{n-j}. \tag{5.5}$$

(b)

$$\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_{2m+1}^k\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}\left(-1\right)^{\sum_{i=1}^{2m+1}j_i}$$
$$= \left(-1\right)^n\mathcal{S}\left(k,n\right)n!H\left(k-n\right). \tag{5.6}$$

en donde $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función escalón unitario $H\left(t\right)=0$ si $t<0$ y $H\left(t\right)=1$ si $t\geq 0$.
(c)

$$\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_m^{(r)}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}$$
$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\left(-1\right)^{r-k}s\left(r,k\right)\mathcal{S}\left(k,j\right)\left(n\right)_j\left(m+1\right)^{n-j} \tag{5.7}$$

(d)

$$\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_{2m+1}^{(k)}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}\left(-1\right)^{\sum_{i=1}^{2m+1}j_i}$$
$$= \sum_{i=n}^{k}\left(-1\right)^{n+k-i}s\left(k,i\right)\mathcal{S}\left(i,n\right)n!H\left(k-n\right). \tag{5.8}$$

(e)

$$\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{j_{m-1}=j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{m-1}}{j_m}\binom{j_m+r-1}{r}$$
$$= \sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}\binom{n}{k}(m+1)^{n-k}. \qquad (5.9)$$

(f)

$$\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}\binom{j_{2m+1}+k-1}{k}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m+1}j_i}$$
$$= (-1)^n\binom{k-1}{n-1}H(k-n). \qquad (5.10)$$

Demostración.
(a) Ponga $p=1$ en (5.2) para obtener (5.5).
(b) En (5.2) ponga $2m+1$ en lugar de m para obtener

$$\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_{2m+1}^{k}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}p^{\sum_{i=1}^{2m+1}j_i}$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(k,j)(n)_j\,p^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^i\right)^{n-j}.$$

Si $k<n$ y $p=-1$, el lado derecho de esta expresión es claramente igual a cero. Si $k\geq n$ podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(k,j)(n)_j\,p^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^i\right)^{n-j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1}\mathcal{S}(k,j)(n)_j\,p^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^i\right)^{n-j}+\mathcal{S}(k,n)(n)_n\,p^n\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^i\right)^{n-n},$$

pues $(n)_j=0$ si $j>n$. Cuando $p=-1$, cada uno de los sumandos de la sumatoria del lado derecho es igual a cero, de modo que (cuando $k\geq n$) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(k,j)(n)_j(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^i\right)^{n-j}=\mathcal{S}(k,n)\,n!\,(-1)^n.$$

En resumen, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}\left(k,j\right)\left(n\right)_j \left(-1\right)^j \left(\sum_{i=0}^{2m+1} \left(-1\right)^i\right)^{n-j} = \left(-1\right)^n \mathcal{S}\left(k,n\right) n! H\left(k-n\right),$$

y por tanto tenemos (5.6).

(c) Ponga $p=1$ en (5.3) para obtener (5.7).

(d) Poniendo $2m+1$ en lugar de m en (5.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m+1}=1}^{n} \sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n} \cdots \sum_{j_1=j_2}^{n} j_{2m+1}^{(k)} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}} p^{\sum_{i=1}^{2m+1} j_i} \\
= \quad & \sum_{i=1}^{k} \left(-1\right)^{k-i} s\left(k,i\right) \sum_{j=1}^{i} \mathcal{S}\left(i,j\right)\left(n\right)_j p^{(2m+1)j} \left(\sum_{i=0}^{2m+1} p^i\right)^{n-j}.
\end{aligned}$$

Si $k<n$ y $p=-1$, el lado derecho de esta expresión es claramente igual a cero. Si $k \geq n$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \left(-1\right)^{k-i} s\left(k,i\right) \mathcal{S}\left(i,j\right)\left(n\right)_j p^j \left(\sum_{i=0}^{2m+1} p^i\right)^{n-j} \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n-1} \left(-1\right)^{k-i} s\left(k,i\right) \sum_{j=1}^{i} \mathcal{S}\left(i,j\right)\left(n\right)_j p^j \left(\sum_{i=0}^{2m+1} p^i\right)^{n-j} \\
& + \sum_{i=n}^{k} \left(-1\right)^{k-i} s\left(k,i\right) \sum_{j=1}^{i} \mathcal{S}\left(i,j\right)\left(n\right)_j p^j \left(\sum_{i=0}^{2m+1} p^i\right)^{n-j}
\end{aligned}$$

Poniendo $p=-1$, cada uno de los sumandos de la primera sumatoria del lado derecho de esta expresión es igual a cero. Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{k-i}s(k,i)\,\mathcal{S}(i,j)\,(n)_j\,(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^i\right)^{n-j}\\
=\;&\sum_{i=n}^{k}(-1)^{k-i}s(k,i)\sum_{j=1}^{i}\mathcal{S}(i,j)\,(n)_j\,(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^i\right)^{n-j}\\
=\;&\sum_{i=n}^{k}(-1)^{k-i}s(k,i)\left(\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{n-1}\mathcal{S}(i,j)\,(n)_j\,(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^i\right)^{n-j}\\+\sum_{j=n}^{i}\mathcal{S}(i,j)\,(n)_j\,(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^i\right)^{n-j}\end{array}\right)\\
=\;&\sum_{i=n}^{k}(-1)^{k-i}s(k,i)\sum_{j=n}^{i}\mathcal{S}(i,j)\,(n)_j\,(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^i\right)^{n-j}\\
=\;&\sum_{i=n}^{k}(-1)^{k-i}s(k,i)\,\mathcal{S}(i,n)\,(n)_n\,(-1)^n\,.
\end{aligned}
$$

En resumen, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_{2m+1}^{(k)}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m+1}j_i}\\
=\;&\sum_{i=n}^{k}(-1)^{n+k-i}s(k,i)\,\mathcal{S}(i,n)\,n!H(k-n)\,,
\end{aligned}
$$

como queríamos.

(e) Poniendo $p=1$ en (5.4) se obtiene (5.9).

(f) Poniendo $2m+1$ en lugar de m en (5.4) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}\binom{j_{2m+1}+k-1}{k}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{2m+1}j_i}\\
=\;&\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^{(2m+1)j}\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^i\right)^{n-j}.
\end{aligned}
$$

Si $k<n$ y $p=-1$ cada sumando de la sumatoria del lado derecho es igual a cero. Si $k\geq n$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^{(2m+1)j}\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^{i}\right)^{n-j}\\
=\;&\sum_{j=1}^{n-1}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}p^{(2m+1)j}\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^{i}\right)^{n-j}\\
&+\binom{k-1}{n-1}\binom{n}{n}p^{(2m+1)n}\left(\sum_{i=0}^{2m+1}p^{i}\right)^{n-n},
\end{aligned}
$$

pues $\binom{n}{j}=0$ con $j>n$. Poniendo $p=-1$ en la última expresión, cada sumando de la primera sumatoria del lado derecho es igual a cero, de modo que

$$
\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}(-1)^{(2m+1)j}\left(\sum_{i=0}^{2m+1}(-1)^{i}\right)^{n-j}=\binom{k-1}{n-1}(-1)^{n}.
$$

Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m+1}=1}^{n}\;\sum_{j_{2m}=j_{2m+1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m}}{j_{2m+1}}\binom{j_{2m+1}+k-1}{k}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m+1}j_i}\\
=\;&(-1)^{n}\binom{k-1}{n-1}H(k-n),
\end{aligned}
$$

lo que prueba (5.10).

Q.E.D.

NOTA. Las fórmulas (5.6), (5.8) y (5.10) han sido obtenidas de (5.2), (5.3) y (5.4), respectivamente, poniendo $2m+1$ en lugar de m y $p=-1$. Si en (5.2), (5.3) y (5.4) ponemos $2m$ en lugar de m y $p=-1$ obetenemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m}=1}^{n}\;\sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_{2m}^{k}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m-1}}{j_{2m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m}j_i}\\
=\;&\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(k,j)\,(n)_j=n^{k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_{2m}=1}^{n}\;\sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}j_{2m}^{(k)}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m-1}}{j_{2m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m}j_i}\\
=\;&\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}s(k,i)\sum_{j=1}^{i}\mathcal{S}(i,j)\,(n)_j=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}s(k,i)\,n^{i}=n^{(k)},
\end{aligned}
$$

y

$$\sum_{j_{2m}=1}^{n}\sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n}\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m-1}}{j_{2m}}\binom{j_{2m}+k-1}{k}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{2m} j_i}$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\binom{n}{j}=\binom{n+k-1}{k},$$

respectivamente. Sin embargo, estos resultados pueden verse como simples consecuencias de (4.1), pues se trata del hecho

$$\sum_{j_{2m}=1}^{n}\sum_{j_{2m-1}=j_{2m}}^{n}\sum_{j_{2m-2}=j_{2m-1}}^{n}\cdots\sum_{j_1=j_2}^{n} f(j_{2m})\binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{2m-1}}{j_{2m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{2m} j_i}$$
$$= f(n),$$

ya comentado después del Corolario 4.1, en donde $f(j_{2m})=j_{2m}^{k}$, $f(j_{2m})=j_{2m}^{(k)}$, y, $f(j_{2m})=\binom{j_{2m}+k-1}{k}$, respectivamente.

6 Comentarios finales

POR HACER.

7 Referencias

[A-S] M. Abramowitz & I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,* Dover Publications, Inc., New York, 1972.

[B-Q] A.T. Benjamin & J.J. Quinn, *Proofs that Really Count. The Art of Combinatorial Proof,* The Dolciani Mathematical Expositions (27), The Mathematical Association of America, 2003.

[C] Peter J. Cameron, *Combinatorics. Topics, Technics, Algorithms,* Cambridge University Press, 1994.

[G-S] G. Grimmett & D. Stirzaker, *Probability and Random Processes, 3rd. edition,* Oxford University Press, 2001.

[H-L] A. Heindl & A.van de Liefvoort, *Moment conversions for discrete distributions,* Extended Abstracts of The Sixth International Workshop on Performability Modeling of Computer and Communication Systems (PMCCS-6), Monticello, Illinois, 2003. (http://www.crhc.uiuc.edu/Multi/PMCCS-Extended-Abstracts.pdf)

[P-W-Z] M. Petkovšek, H.S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B,* A K Peters, Ltd. Wellesley, Massachusetts, 1996.

[R] J. Riordan, *Combinatorial Identities,* John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[V] L. Verde Star, *Matemática discreta y combinatoria,* Anthropos – Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 1995.